Christian Rothleitner, Peter Becker, Horst Bettin, Dorothea Knopf

KILOGRAMM UND PLANCK-KONSTANTE

1. EINLEITUNG

Am 16. November 2018 wurde auf der 26. Generalkonferenz für Maß und Gewicht in Versailles, Frankreich, die neue Definition der Einheit Kilogramm im internationalen Einheitensystem (SI) formal verabschiedet. Auch wenn dieser Beschluss erst am 20. Mai 2019 – am Welt-Tag der Metrologie – in Kraft tritt, so ist das Urkilogramm bereits Geschichte. Nahezu 130 Jahre hat es uns als Definition gedient. Dieser Gegenstand – auch unter der Bezeichnung *Internationales Kilogramm-Prototyp* bekannt – wog per Definition exakt 1 kg. Die Massen anderer Körper wurden durch Vergleichswägungen mit ihm ermittelt.

Zukünftig wird man sich mit einer Definition folgenden Inhalts anfreunden müssen:

Das Kilogramm, mit dem Symbol kg, ist die SI-Einheit der Masse. Es ist definiert, indem der numerische Wert der Planck-Konstante *h* auf 6.626 070 15 $\times 10^{-34}$ festgelegt wird, wenn er in der Einheit J s, was äquivalent zu kg m^2 s^{-1} ist, ausgedrückt wird, wobei das Meter und die Sekunde durch c und $\Delta\nu_{Cs}$ definiert sind. Hierbei bedeuten c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum und $\Delta\nu_{Cs}$ die Übergangsfrequenz zwischen den beiden Hyperfeinstrukturniveaus des Grundzustandes des Cäsiumisotops ^{133}Cs.

Wenngleich die neue Definition für viele Menschen auf den ersten Blick unzugänglich erscheint, da nur Experten wissen, was man unter der Planck-Konstante versteht, so erlaubt sie doch viele Freiheiten und zusätzliche Sicherheit. Sicherheit, da die Definition jetzt nicht mehr durch eventuelle Beschädigung des Urkilogramms gefährdet werden kann. Freiheiten, da jetzt im Prinzip jeder in der Lage ist ein Kilogramm darzustellen. Die einzelnen Nationen sind unabhängig vom Urkilogramm, das in einem Tresor bei Paris lagert. Die neue Definition erlaubt beliebige Realisierungen (Darstellungen) des Kilogramms.

Lange hat es gedauert bis es zu dieser Neudefinition kam. Vor bereits 40 Jahren gab es erste Ideen, das Kilogramm neu zu definieren. Damals schon durch die Bestimmung der Avogadro-Konstanten [1]. Ein Ansatz, der schließlich später mit großem Engagement optimiert wurde und heute eines der genauesten Experimente zur Darstellung des Kilogramms beschreibt. Intensiver wurden die Bemühungen jedoch erst vor ungefähr 20 Jahren. In jenen Tagen gab es neben dem Avogadro-Experiment (auch XRCD-Methode genannt – aus X-Ray Crystal Density) noch Ansätze wie „Magnetische Schwebemethode“ oder „Ionenakkumulation“. Letztere wurden jedoch schließlich eingestellt, da geforderte relative Messunsicherheiten von $5{\cdot}10^{-8}$ als nicht erreichbar galten. Nur die XRCD-Methode und die Watt-Waagen (heute Kibble-Waagen genannt) waren noch im Rennen. Die Watt-Waage war ein Ansatz, der auf die Strommessung zurückgeht und schließlich zur Bestimmung der Planck-Konstante verwendet wurde. Während also die XRCD-Methode das Kilogramm mit der Avogadro-Konstante verknüpfte, stellte die Watt-Waage eine Verbindung des Kilogramms zur Planck-Konstante her. Beide Konstanten lassen sich jedoch, mit vernachlässigbarer Unsicherheit, ineinander umrechnen. Es ergab sich somit eine Art Wettbewerb, welche Konstante, und somit auch welche Methode, wird das Kilogramm zukünftig definieren? Im Jahre 2011 entschied dann die Generalkonferenz für Maß und Gewicht, dass das Kilogramm über die Planck-Konstante definiert werden würde. Dieser Weg würde die „Rückkehr“ der auf der Basis von Quanteneffekten gemessenen elektrischen Einheiten in ein modernes SI ermöglichen. Für eine Neudefinition des Kilogramms auf der Basis der Planck-Konstante mussten jetzt aber noch sehr ambitionierte Ziele erreicht werde. Es musste mit mindestens drei unabhängigen Experimentalaufbauten, worunter beide Methoden vertreten sein sollten, eine relative Messunsicherheit von besser oder gleich $5{\cdot}10^{-8}$ erzielt werden. Ferner musste mindestens eines dieser Experimente eine relative Messunsicherheit von mindestens $2{\cdot}10^{-8}$ erreichen. Letzten Endes mussten die Ergebnisse untereinander auch konsistent sein, d. h. die Fehlerbalken (Messunsicherheiten) mussten überlappen.

Das Ergebnis ist bekannt – sogar drei unabhängige Experimente erreichten eine relative Messunsicherheit von $2{\cdot}10^{-8}$. Nun, da der Zahlenwert der Planck-Konstante, sowie der Avogadro-Konstante festgelegt wurde, lassen sich beide Ansätze dazu verwenden, das Kilogramm auch in Zukunft darzustellen. Im Folgenden sollen beide Methoden beschrieben werden. Darauf aufbauend soll erläutert werden, wie auch die Weitergabe erfolgen wird und welche Konsequenzen sich ergeben werden.

2. REALISIERUNG UND WEITERGABE MIT DER KIBBLE-WAAGE

Zwei experimentelle Ansätze haben es geschafft, das Kilogramm mit einer Fundamentalkonstanten zu verbinden und für beide Ansätze konnten relative Messunsicherheiten von weniger als $2{\cdot}10^{-8}$ angegeben werden. Ein Ansatz, die XRCD-Methode, stellt hierbei eine Verbindung zur Avogadrokonstante her und soll in Kapitel 3 beschrieben werden. Ein weiterer Ansatz beschreibt eine Verbindung zwischen der Masse und den elektrischen Größen Spannung und Widerstand. Diese Größen

Dr. Christian Rothleitner, Dr. Peter Becker,
Dr. Horst Bettin, Dr. Dorothea Knopf
Physikalisch-Technische Bundesanstalt (PTB),
Bundesallee 100, 38116 Braunschweig
Kontakt: christian.rothleitner@ptb.de

wiederum können als ein Vielfaches einer Quanten-Spannung, bzw. eines Quanten-Widerstandes angegeben werden, welche zur Planck-Konstanten proportional sind. Dadurch wird eine Verbindung zwischen Masse und der Planck-Konstante geschaffen. Da die Einheit der Planck-Konstante jedoch neben dem Kilogramm noch die Einheiten Meter und Sekunde enthält, sind zur Definition der Einheit Kilogramm über die Planck-Konstante noch die Definitionen jener Einheiten zu berücksichtigen. Dieser Ansatz wird, zu Ehren von Bryan Kibble, welcher maßgeblich zur Entwicklung dieses Ansatzes beigetragen hat und im Jahre 2016 verstarb, heute als Kibble-Waage bezeichnet. Die Funktionsweise dieses Ansatzes soll im Folgenden beschrieben werden, da diese sich sowohl zur Realisierung als auch zur Weitergabe der Einheit Kilogramm eignet.

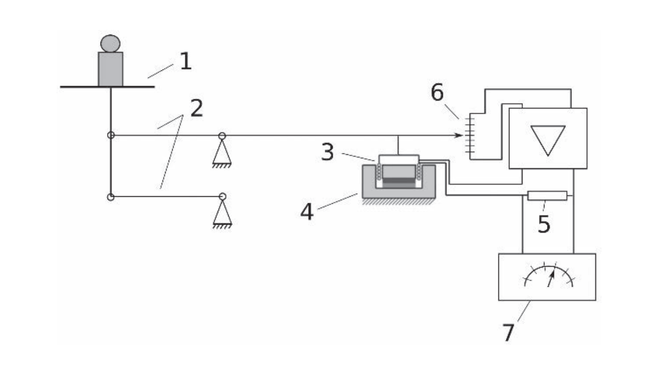

Abb. 1: Prinzip einer Wägezelle mit elektromagnetischer Kraftkompensation (EMK). 1-Lastaufnehmer mit Gewichtstück, geführt mit Parallellenker zur Reduktion der Einflüsse außermittiger Belastung, 2-Wägebalken, 3-Spule, 4-Magnet, 5-Elektrischer Widerstand, 6-Positionssensor, 7-Spannungsmesser.

Die Kibble-Waage – auch unter der Bezeichnung Watt-Waage bekannt – hat sich aus der sogenannten Stromwaage entwickelt. Die Stromwaage, wie der Name schon vermuten lässt, war eine Methode um die Einheit des elektrischen Stroms – also das Ampère – durch Vergleich mit der Gewichtskraft einer Masse zu realisieren. Dies erfolgte durch das Prinzip des Wägens, d. h. die elektromagnetische Anziehungskraft zweier stromdurchflossener Leiter wurde durch die von der Masse durch die Erdanziehung verursachte Gewichtskraft kompensiert. Später wurde anstelle des einen Leiters ein Permanentmagnet verwendet, und der zweite, bewegliche Leiter (Aktor), wurde in Form einer Spule in dessen Magnetfeld realisiert.

Das Prinzip der Stromwaage wird heute auch in hochgenauen Massekomparatoren verwendet, die sich Wägezellen bedienen, die auf der elektromagnetischen Kraftkompensation (EMK) beruhen.

Die Grafik in Abb. 1 zeigt die Funktionsweise einer solchen EMK-Wägezelle. Auf der einen Seite eines Wägebalkens (2) – in der Graphik auf der linken Seite – wird eine Gewichtskraft durch Auflegen einer Masse m auf den Lastaufnehmer (1) erzeugt. Diese mechanische Kraft

$$F_g = m \cdot g \,, \qquad (1)$$

mit der lokalen Fallbeschleunigung g, wird durch eine elektromagnetische Kraft ausgeglichen, die durch eine Tauchspule, bestehend aus einer Spule (3) und einem Permanentmagneten (4) erzeugt wird. Der dafür notwendige Spulenstrom wird dazu soweit erhöht, dass die Gewichtskraft ausgeglichen wird. Die Gleichgewichtslage wird mithilfe eines Positionssensors (6) erfasst. Die dafür aufgewendete elektromagnetische Kraft ist proportional zu dem in der Spule fließenden Strom, der als Spannungsabfall (7) an einem elektrischen Widerstand (5) gemessen wird. Die kompensierende elektromagnetische Kraft ergibt sich aus der magnetischen Flussdichte B, der Leiterlänge l in der Spule und der Stärke des elektrischen Stromes I zu

$$F_{em} = Bl \cdot I \,. \qquad (2)$$

Stehen beide Kräfte im Gleichgewicht, so ergibt sich aus Kombination der Gleichungen (1) und (2) daraus

$$m = \frac{Bl \cdot I}{g} \,. \qquad (3)$$

Die zu ermittelnde Masse ist somit, wenn Bl und g unverändert bleiben, zur Stromstärke proportional und somit kann der Faktor Bl/g durch Auflegen einer kalibrierten Masse (rückgeführt auf das Urkilogramm) ermittelt werden. Andere Gewichtswerte können dann direkt anhand der Stromstärke gemessen werden. Das Messsystem ist somit eine relatives, bei dem Stromstärken, und somit auch Massewerte, verglichen werden.

Bei der Stromwaage hatte man jedoch keine kalibrierte Stromstärke, mit deren Hilfe man den Proportionalitätsfaktor bestimmen konnte. Es handelt sich hier um eine Absolutmessung. Um die Stromstärke aus Gleichung (3) zu ermitteln, müssen alle anderen Parameter mit hinreichender Genauigkeit gemessen werden. Für die Masse und die lokale Fallbeschleunigung ist dies kein Problem, für die magnetische Flussdichte und die Leiterlänge jedoch stößt man hier schnell an seine Grenzen.

Bryan Kibble hatte in den 1970er Jahren die zündende Idee, wie der Faktor Bl mit einer zu den anderen Parametern vergleichbaren Messunsicherheit bestimmt werden könnte. Er schlug vor im selben Aufbau die Spule gleichförmig durch das Magnetfeld zu bewegen. Durch die Faradaysche Induktion wird dadurch an den Spulenenden eine Gleichspannung erzeugt, welche durch

$$U_{ind} = Bl \cdot v \qquad (4)$$

beschrieben werden kann. v ist die relative Geschwindigkeit zwischen Spule und Magnet. Die induzierte Spannung lässt sich aber wieder hochgenau messen, genauso wie die Geschwindigkeit, welche mithilfe eines Laserinterferometers und eines stabilen Zeitnormals (z. B. Atomuhr) ermittelt wird. Auflösen von Gleichung (4) nach Bl und einsetzen in Gleichung (3) ergibt somit

$$m = \frac{U \cdot U_{ind}}{g \cdot v \cdot R} \,, \qquad (5)$$

wobei der Strom aus Gleichung (3) durch das Ohmsche Gesetz, als Spannungsabfall an einem Widerstand ausgedrückt wurde. Alle Parameter aus Gleichung (5) lassen sich mit höherer Genauigkeit messen als dies für B und l mit anderen Mitteln möglich wäre. Bei den Kibble-Waagen wurden hier sogar relative Messunsicherheiten von weniger als $2 \cdot 10^{-8}$ erreicht [2] [3].

Durch die Entdeckung des Josephson-Effekts und des Quanten-Hall-Effekts können Spannung und Widerstand deutlich präziser und auf der Grundlage von Naturkonstanten gemessen werden. Nun ist die elektrische Spannung über die Josephsonkonstante $K_J = 2e/h$ proportional zur Elementarladung e und zur Planck-Konstante h. Der elektrische Widerstand ist ebenfalls entsprechend $R_K = h/e^2$ zu beiden Fundamentalkonstanten proportional. R_K bezeichnet hier die von Klaus von Klitzing entdeckte und nach ihm benannte Widerstandskonstante. Da die Spannung im Zähler quadratisch und der Widerstand im Nenner nur einfach eingeht, kürzt sich die Elementarladung heraus und nur noch die Planck-Konstante bleibt einfach erhalten. Um das noch deutlicher zu machen, lässt sich die gemessene Spannung wie folgt schreiben: $U = n \cdot f_J / K_J$ (entsprechendes gilt für die induzierte Spannung U_{ind}). Hier bezeichnen f_J die Josephsonfrequenz und n eine natürliche Zahl. Der Widerstand lässt sich entsprechend $R = R_K / p$ schreiben, wobei p wieder eine natürliche Zahl darstellt. Gleichung (5) wird somit zu

$$m = h \cdot \frac{p \cdot n \cdot n_{ind} \cdot f_J^2}{v \cdot g} \,. \qquad (6)$$

Vor der Neudefinition der SI-Einheiten galt es, die Planck-Konstante durch obige Beziehung zu messen. Dazu wurde ein auf das Urkilogramm rückgeführtes Gewichtstück verwendet. Durch die Neudefinition der Einheit der Masse wird aber der Zahlenwert der Planck-Konstante festgelegt und es kann im Umkehrschluss der Wert der Masse eines Gewichtstückes ermittelt werden. Das Messsystem beschreibt deshalb eine Verbindung zwischen Masse und Planck-Konstante und somit auch eine Realisierung der Einheit Kilogramm. Noch abstrakter wird die Gleichung, wenn man die Geschwindigkeit und die Fallbeschleunigung, sowie die Josephsonfrequenz durch die Definitionen der Einheiten Meter und Sekunde ausdrückt. Dann erhält man

$$m = \frac{h \cdot \Delta\nu(^{133}\mathrm{Cs})_{\mathrm{hfs}}}{c^2} \cdot k \,, \qquad (7)$$

wobei die dimensionslosen Größen zum Faktor k zusammengefasst wurden (siehe hierzu [4]). c bezeichnet die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum und $\Delta\nu(^{133}\mathrm{Cs})_{\mathrm{hfs}}$ die Übergangsfrequenz zwischen den beiden Hyperfeinstrukturniveaus des Grundzustandes des Cäsiumisotops $^{133}\mathrm{Cs}$. Hier wird nun deutlich, dass zur Definition der Einheit Kilogramm auch die Definitionen der Einheiten Meter und Sekunde notwendig sind. Eine Interpretation von Gleichung (7) wäre z. B.: Eine Substanz der Masse m enthält ebenso viel Energie, wie k Photonen der Frequenz $\Delta\nu(^{133}\mathrm{Cs})_{\mathrm{hfs}}$. Dies sieht man, wenn man beide Seiten der Gleichung (7) mit c^2 multipliziert. Dann steht auf der linken Seite die Äquivalenz von Masse und Energie ($E = m \cdot c^2$) und auf der rechten Seite die Energie, die ein Photon enthält ($E = h \cdot \nu$).

Für die Messung der Planck-Konstante wurden die Kibble-Waagen nur für einen bestimmten Massewert konzipiert, meist 1 kg. Dies begründet sich damit, dass der Parameter Masse in obiger Gleichung bei 1 kg die kleinste Messunsicherheit besitzt. Abb. 2 zeigt die Kibble-Waage NIST-4 des US-amerikanischen nationalen Metrologieinstituts NIST. Die Größe der Waage resultiert vorwiegend aus der Größe des Magnetsystems, welches zum Tragen eines Kilogramms notwendig ist. Weitere Institute, die solch eine Kibble-Waage aufbauen, sind das NRC (Kanada), LNE (Frankreich), BIPM (Frankreich), Metas (Schweiz), KRISS (Süd-Korea), MSL (Neuseeland) und das UME (Türkei). Eine etwas abgeänderte Form – Joule-Waage genannt – aber dem Kibble-Prinzip sehr ähnlich, baut das chinesische nationale Metrologieinstitut NIM [5]. Die genauesten Messungen wurden dabei vom NRC und dem NIST erzielt, beide mit relativen Messunsicherheiten von weniger als $2 \cdot 10^{-8}$.

Gleichung (6) ist jedoch grundsätzlich gültig für alle Massewerte, ist also nicht auf ein Gewichtstück der Masse 1 kg beschränkt. Die Planck-Konstante ist eine Fundamentalkonstante, welche unabhängig vom Massewert denselben numerischen Wert besitzt. Das ermöglicht es, diesen Ansatz der Realisierung der Einheit Kilogramm für jeden beliebigen Massewert zu verfolgen.

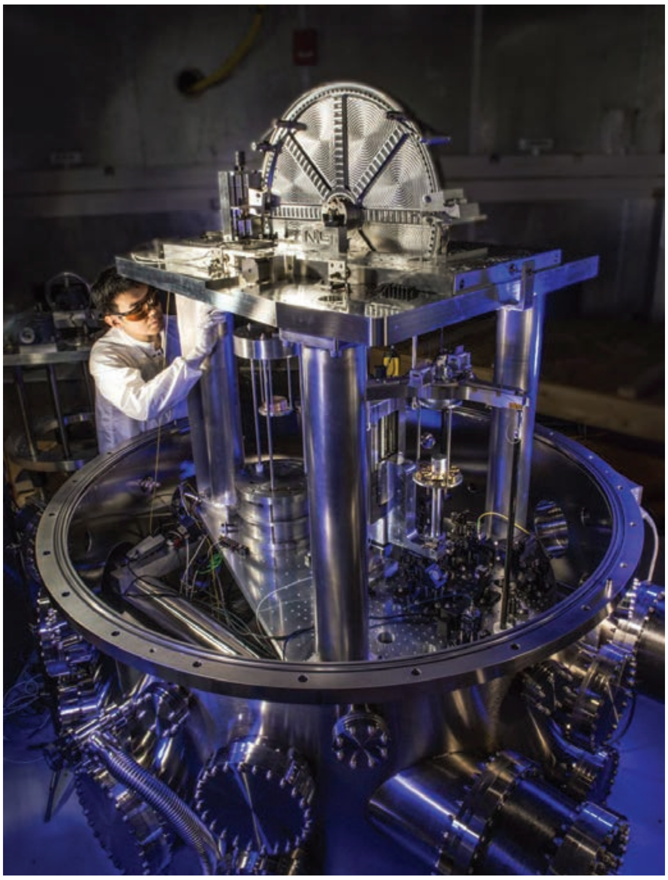

Abb. 2: NIST-4 Kibble-Waage des US-amerikanischen Metrologieinstituts NIST. Die erzielten relativen Messunsicherheiten von weniger als $2 \cdot 10^{-8}$ erfordern optimale Laborbedingungen. Die Kibble-Waage arbeitet bei einem Nominalmassewert von 1 kg. (Quelle: Curt Suplee/NIST.)

Ein Messsystem, welches auf dem Prinzip der Kibble-Waage basiert, ist zudem gleichzeitig eine Form der Weitergabe der Einheit Kilogramm. Während in der konventionellen Wägetechnik ein kalibriertes Gewichtstück als Referenz im Rahmen der Weitergabe dient, kann zukünftig die Waage selbst als Referenz betrachtet werden. Dies stellt einen Paradigmenwechsel in der Massemetrologie dar, bei der bisher die Einheit über einen Gegenstand – dem Urkilogramm – definiert war. Nationale Massenormale haben somit den Wert 1 kg, da hier die Messunsicherheit am geringsten ist. Das könnte sich in der Zukunft ändern, denn, wie bereits erwähnt, lassen sich Kibble-Waagen auch für andere Gewichtswerte optimieren. 100 g ist hierbei ein denkbarer Wert, denn dieser Wert liegt am nächsten am Kilogramm (die Messunsicherheiten sind vergleichbar zu denen für 1 kg) und die benötigte Magnetfeldstärke zum Anheben eines 100 g Gewichtstücks ist so viel geringer, dass die resultierende Kibble-Waage wesentlich kompakter wird. Durch die kleineren Magnete lassen sich auch deren Magnetfelder besser optimieren. Denkbar wäre ferner ein Vergleich der Messeinrichtungen selbst, d.h. der Kibble-Waagen, da die Messeinrichtungen transportabel werden könnten. Dies könnte sinnvoll sein, da bei kleinen Massen (< 1 mg) die nötigen Vergleichsgewichtstücke schwer handhabbar sind.

Verschiedene Nationale Metrologieinstitute weltweit haben die Chancen der Neudefinition erkannt und sind dabei Kibble-Waagen zu entwickeln, welche für einen großen Wägebereich ausgelegt sind. So entwickelt das US-amerikanische Metrologieinstitut NIST zum Beispiel ein Wägesystem für 1 g bis zu 10 g. Das NPL, das britische Schwesterinstitut, hingegen strebt einen Messbereich von 10 g bis zu 250 g an. An der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt in Braunschweig wird derzeit, in Kooperation mit der Technischen Universität Ilmenau, ein System – die sogenannten Planck-Waage – entwickelt, welches sogar einen Bereich von 1 mg bis zu 1 kg abdecken soll [6]. Abb. 3 zeigt den Aufbau der Planck-Waage PB2, die einen Messbereich von 1 mg bis 100 g bedient. Die Waage ist in ihrer Größe vergleichbar mit normalen Analysewaagen. Hinzu kommen jedoch noch hochgenaue Messgeräte (siehe Abb. 3, linkes Bild). Erste Ergebnisse zeigen bereits, dass dies grundsätzlich machbar ist. Die kompakte Bauweise kann hier erzielt werden, da, wie in der normalen Analysewaage der Fall, das Hebelverhältnis ausgenutzt wird und das notwendige Magnetsystem somit wesentlich kleiner ausfällt, als z. B. in der NIST-4 Kibble-Waage.

Die Messunsicherheiten, welche die verschiedenen Institute für ihre Systeme anstreben, orientieren sich bislang noch an den vom OIML, der internationalen Organisation für gesetzliches Messwesen, erlaubten maximalen Abweichungen der Massenormale von ihrem Nominalwert. Das Messsystem, mit dem ein solches Normal kalibriert wird, muss jedoch nochmal eine um einen Faktor 3 kleinere Messunsicherheit aufweisen. Die daraus resultierenden Messunsicherheiten für solche Kibble-Waagen ist in Abb. 4 gezeigt. Zu sehen ist hier, dass sich die geringsten Messunsicherheiten für Massewerte zwischen 100 g und 1 kg ergeben. Für kleinere Massewerte steigt die Messunsicherheit exponentiell an. Dies ist vor allem darauf zurück zu führen, dass die Masseskale über mehrere Dekaden über Vergleiche ausgehend von 1 kg aufgebaut wird. Messunsicherheiten propagieren somit weiter zu den kleineren Massewerten. Die Kalibrierunsicherheit in den Referenznormalen für die nächste Dekade beschreibt somit das Limit für die Messunsicherheiten in der entsprechenden Dekade. Die Wiederholbarkeiten der Waagen liegen dort in derselben Größenordnung wie die Kalibrierunsicherheiten der Referenznormale. Eine weitere Reduktion der Wiederholbarkeit der Waage führt deshalb nicht zu einer wesentlichen Verringerung der Gesamtmessunsicherheit.

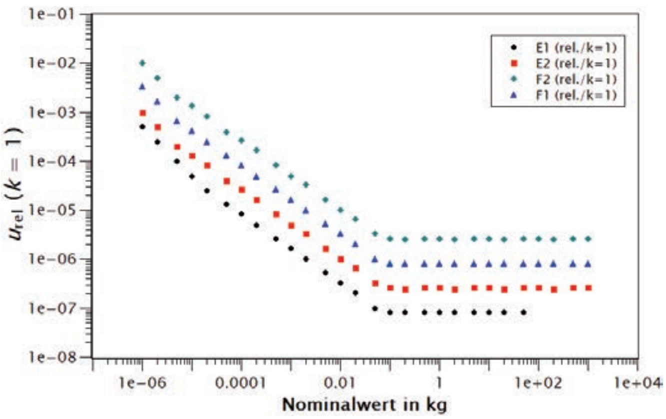

Abb. 4: Messunsicherheiten, die eine Waage haben darf, mit der ein Gewichtstück des entsprechenden nominellen Massewertes kalibriert wird. Die Bezeichnungen E1, E2, F1 und F2 geben die von der OIML empfohlenen Genauigkeitsklassen der Gewichte an.

Mit der Neudefinition jedoch ändert sich diese Sichtweise. Nun kann eine Waage für kleinere Massewerte weiter optimiert werden, da eine Messung der elektrischen Größen, welche zur Bestimmung des Bl-Faktors genommen werden, nicht vom Massewert abhängen. Der Bl-Faktor beschreibt hier sozusagen das Referenznormal. Die Kalibrierunsicherheit des Massenormals gibt folglich nicht mehr eine Grenze der Messunsicherheit an.

3. REALISIERUNG UND WEITERGABE MIT DER XRCD-METHODE

Die andere Methode zur genauesten Bestimmung der Planck-Konstante und – nach Inkrafttreten der neuen Definition – zur Darstellung des Kilogramms ist die sogenannte X-Ray Crystal

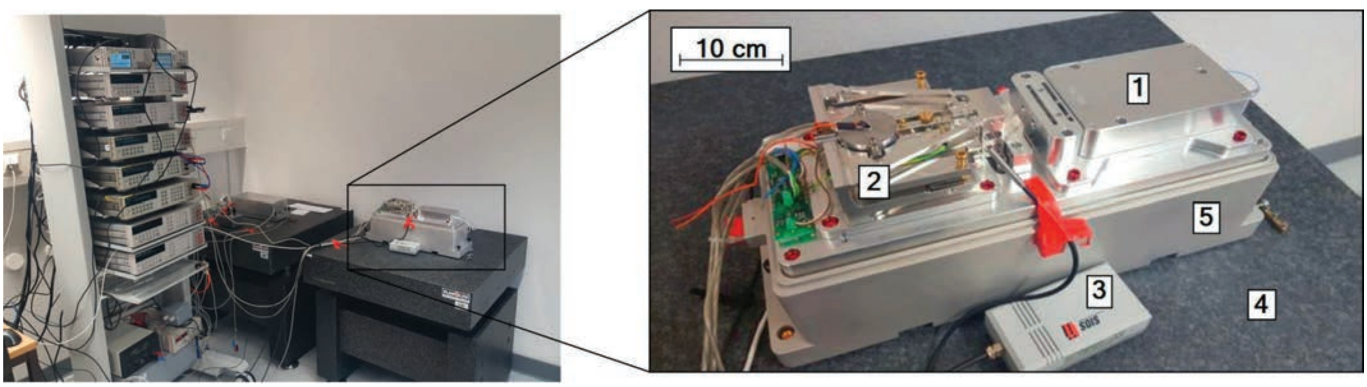

Abb. 3: Aufbau der Planck-Waage PB2 mit Messgeräten (linkes Bild). Rechts Bild: Nahaufnahme der Planck-Waage: 1-Laserinterferometer, 2-Wägezelle, 3-Umweltsensor, 4-Wägetisch, 5-Gehäuse (Das Oberteil des Gehäuses mit Lastwechsler ist hier nicht zu sehen).

Density (XRCD) Methode [7]. In dieser Methode wird zuerst einmal die Anzahl der Atome in einer Silicium-Probe bestimmt. Auf diese Weise können dann die Masse eines Silicium-Atoms und die Avogadro-Konstante, d. h. die Anzahl der Teilchen in einem Mol, bestimmt werden. Da das neue Kilogramm auf der Festlegung des Zahlenwerts der Planck-Konstante beruht, muss die XRCD-Methode noch mit Messungen kombiniert werden, die die Masse eines Atoms oder eines anderen elementaren Teilchens mit der Planck-Konstante verknüpfen. Dies gelingt sehr genau mit Hilfe der Rydberg-Konstante R_∞, mit der die Ruhemasse des Elektrons $m(\mathrm{e})$ unter Verwendung der Planck-Konstante h, der Lichtgeschwindigkeit c im Vakuum und der Feinstrukturkonstante α angegeben werden kann:

$$m(\mathrm{e}) = \frac{2hR_\infty}{c\alpha^2}\,. \tag{8}$$

Der Koeffizient $R_\infty/(c\alpha^2)$ ist mit einer relativen Unsicherheit besser als $1\cdot10^{-9}$ bekannt. Mit Hilfe der relativen Atommassen des Elektrons und des Siliciums, $A_\mathrm{r}(\mathrm{e})$ bzw. $A_\mathrm{r}(\mathrm{Si})$, kann im neuen Einheitensystem die Masse eines Silicium-Atoms berechnet werden:

$$m(\text{Si-Atom}) = m(\mathrm{e})\cdot\frac{A_\mathrm{r}(\mathrm{Si})}{A_\mathrm{r}(\mathrm{e})} = \frac{2hR_\infty}{c\alpha^2}\cdot\frac{A_\mathrm{r}(\mathrm{Si})}{A_\mathrm{r}(\mathrm{e})}\,. \tag{9}$$

Zur Bestimmung der Anzahl der Atome werden an einer Siliciumkugel (siehe Abb. 5) das Silicium-Volumen V_Si und das Volumen V_Atom eines Atoms ermittelt. Das Volumen eines Atoms im Kristall wird aus dem Gitterparameter a und der Zahl der Atome je Einheitszelle (=8) berechnet. Damit kennt man die Zahl N der Atome in der Kugel:

$$N = \frac{V_\mathrm{Si}}{V_\mathrm{Atom}} = \frac{8V_\mathrm{Si}}{a^3} \tag{10}$$

und schließlich die Masse der Silicium-Kugel:

$$m_\mathrm{SI} = Nm(\text{Si-Atom})\,. \tag{11}$$

Da Silicium drei stabile Isotope hat, müssen $m(\text{Si-Atom})$ und $A_\mathrm{r}(\mathrm{Si})$ als mittlere atomare Masse bzw. mittlere relative Atommasse interpretiert werden:

$$A_\mathrm{r}(\mathrm{Si}) = \sum_i x({}^i\mathrm{Si})\,A_\mathrm{r}({}^i\mathrm{Si})\,, \tag{12}$$

wobei $x({}^i\mathrm{Si})$ den Stoffmengenanteil des Isotops ${}^i\mathrm{Si}$ bedeutet. Die relativen Atommassen $A_\mathrm{r}({}^i\mathrm{Si})$ werden mittels Penningfallen mit der Masse des Kohlenstoffisotops ${}^{12}\mathrm{C}$ verglichen und sind ebenfalls sehr genau bekannt. Weil die Stoffmengenanteile $x({}^i\mathrm{Si})$ im natürlichen Silicium nicht genau genug gemessen werden können, wird für die höchste Genauigkeit Isotopenangereichertes Silicium ${}^{28}\mathrm{Si}$ verwendet. Da im angereicherten Kristall die Isotope ${}^{29}\mathrm{Si}$ und ${}^{30}\mathrm{Si}$ einen mehr als tausendfach geringeren Anteil haben als im natürlichen Fall, werden die beiden Isotope als ein "virtuelles" Element in der ${}^{28}\mathrm{Si}$-Matrix angesehen, um dann die Methode der Isotopenverdünnungs-Massenspektrometrie (IDMS) anwenden zu können [8]. Die Messprobe wird mit einer hochangereicherten ${}^{30}\mathrm{Si}$-Probe so gemischt, dass die Isotope ${}^{29}\mathrm{Si}$ und ${}^{30}\mathrm{Si}$ etwa im Verhältnis 1:1 vorliegen. Die Kristalle werden in einem einzigen Schritt nasschemisch in eine alkalische Silikatlösung umgewandelt und als Aerosol einem ICP-Massenspektrometer zur Messung zugeführt. Ein Vorteil dieser Methode ist auch die Möglichkeit, „Leermessungen" im Spektrometer vorzunehmen, um Einflüsse von Kontamination und vom Gerät selbst zu erfassen. Nur die Anteile der Isotope ${}^{29}\mathrm{Si}$ und ${}^{30}\mathrm{Si}$ werden gemessen, deshalb benötigt die Geräteelektronik nicht den großen dynamischen Bereich, der für Messungen des ${}^{28}\mathrm{Si}$-Anteils notwendig wäre.

Das hochangereicherte Material wurde in Zusammenarbeit mit einem russischen Konsortium unter Leitung des Atomministeriums in Zelenogorsk und Nizhniy Novgorod hergestellt [9]. Die Anreichung von gasförmigen $\mathrm{SiF_4}$ erfolgte in mehreren Kaskaden von Zentrifugen, anschließend wurde das Gas in Silan, $\mathrm{SiH_4}$, umgewandelt, chemisch gereinigt und als Polykristall abgeschieden. Im Leibniz-Institut für Kristallzüchtung (IKZ) in Berlin wurden schließlich daraus die Einkristalle gezogen. Abb. 5 zeigt einen ${}^{28}\mathrm{Si}$-Einkristall, zusammen mit einer 1 kg Silicium-Kugel (Durchmesser ca. 93,7 mm). Der Anreicherungsgrad der Einkristalle mit Massen zwischen 5 kg und 6 kg von mehr als 99,995 % und seine chemische Reinheit mit weniger als 0,05 µmol/mol an Fremdatomen waren Voraussetzung für das Erreichen der geforderten Messunsicherheiten. Zur Messung der erforderlichen Kristallparameter wurden aus jedem Kristall nach einem detaillierten Schneideplan zwei Kugeln jeweils der Masse 1 kg, ein Röntgeninterferometer und eine Vielzahl spezieller Kristallproben hergestellt.

Die Kugeln werden in der PTB aus dem Kristallmaterial hergestellt und poliert. Sie zeigen im besten Fall eine Abweichung von einer perfekten Gestalt von nur wenigen 10 Nanometern (vgl. Abb. 6). Zur Messung des Kugeldurchmessers wird Laserlicht

Abb. 5: Silicium-Einkristall aus hochangereichertem ${}^{28}\mathrm{Si}$ und eine 1 kg Silicium-Kugel (Durchmesser ca. 93,7 mm).

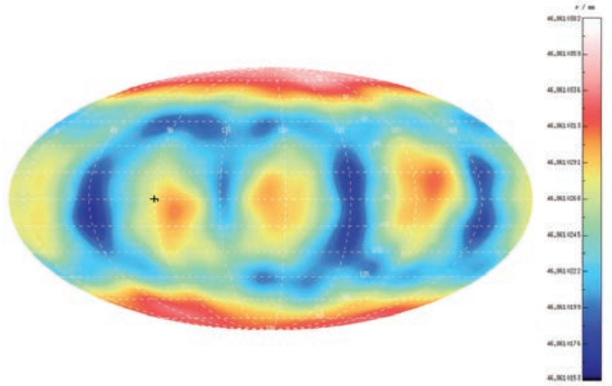

Abb. 6: Radiustopographie der ${}^{28}\mathrm{Si}$-Kugel Si28kg02a. Die dargestellten Abweichungen von einer idealen Kugel betragen maximal 20 nm.

von beiden Seiten über Glasfasern in die beiden Objektive eingekoppelt. Der Kugeldurchmesser wird durch interferometrische Abstandsmessungen zwischen den inneren Oberflächen (blau in der Abb. 7) der Objektive mit und ohne Kugel bestimmt. Ein Hebemechanismus bewegt und dreht die Kugel im Interferometer.

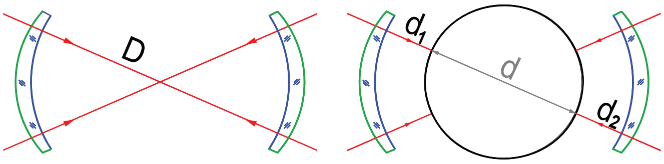

Fig. 7: Prinzip der Durchmessermessungen in der PTB [7].

Das Atomvolumen ermittelt man aus den Netzebenenabständen des Kristallgitters mit Hilfe eines Röntgeninterferometers. Alle Masse- und Längenbestimmungen werden im Vakuum bei 20 °C durchgeführt. Infolge des Si-Ausdehnungskoeffizienten von ca. $2{,}6 \cdot 10^{-6}$ K^{-1} müssen die Messungen der Kristalltemperaturen besser als 0,001 K sein und auch in den beteiligten Laboratorien übereinstimmen.

Die Siliciumkugel ist mit einer dünnen, nur ca. 1 nm dicken aber trotzdem „störenden“ Oxidhaut belegt, die hauptsächlich ihre Struktur beim Poliervorgang erhält und die hinsichtlich ihrer Geometrie und Masse charakterisiert werden muss. Außerdem befinden sich normalerweise noch Kohlenstoffverbindungen und eine Monolage Wasser auf der Kugel. Die Gesamtmasse der Oberflächenschichten m_{SL} muss noch zur Masse des Siliciums nach Gleichung (11) hinzugerechnet werden, um die Gesamtmasse der Kugel zu erhalten:

$$m_{\mathrm{Kugel}} = \frac{2\,h\,R_\infty}{c\,\alpha^2}\,\frac{\sum_{i=28}^{30} x(^i\mathrm{Si})\,A_\mathrm{r}(^i\mathrm{Si})}{A_\mathrm{r}(\mathrm{e})}\,\frac{8\,V_{\mathrm{Si}}}{a^3} + m_{\mathrm{SL}} - m_{\mathrm{deficit}}. \quad (13)$$

Die durch Punktdefekte verursachten Masseänderungen werden bei der Berechnung der Kugelmasse als m_{deficit} berücksichtigt [7]. Die Kristallverunreinigungen wie Kohlenstoff, Sauerstoff und Bor werden mit Fourier-Infrarot-Spektrometern in der PTB, Wasserstoff mit Deep-Level-Transient-Spektroskopie an der TU Dresden und Leerstellen mittels Positronenvernichtung an der Universität Halle untersucht.

In der Tabelle 1 sind die voraussichtlichen Unsicherheitsbeiträge für die Darstellung des neu-definierten Kilogramms aufgelistet. Es fällt auf, dass die größten Unsicherheiten von den Messungen des Volumens und der Oberflächenschichten herrühren. Deshalb wird noch daran geforscht, diese Messungen weiter zu verbessern.

Die Weitergabe der Masseneinheit an Massenormale aus Stahl oder Platin-Iridium (PtIr) in Luft wird über Vergleichs-Wägungen realisiert. Da die beiden Massen (oder Maßverkörperungen) unterschiedliche Dichten und Oberflächen haben, sind umfangreiche Auftriebs- und Sorptionskorrekturen notwendig.

Man kann auch Silicium mit natürlicher Isotopenzusammensetzung für die Darstellung der Masseneinheit verwenden. Für kleine Massen, z. B. unter 10 mg, werden nur relative Unsicherheiten von ca. 10^{-5} benötigt und deshalb reicht hier die Unsicherheit, mit der die Isotopenzusammensetzung des natürlichen Siliciums gemessen werden kann. Für 1 kg Massen baut die PTB eine hydrostatische Wägeapparatur auf, die eine magnetische Kopplung zur Waage benutzt und in der die Dichte ρ von Si-Kugeln im Vergleich zur Dichte von ^{28}Si-Kugeln bestimmt werden kann. Mit einer zusätzlichen Volumenmessung V kann dann die Masse m der Probe berechnet werden: $m = \rho V$.

Größe	Relative Standard-messunsicherheit in 10^{-9}
Planck-Konstante h	0
h/m(Si-Isotope)	<1
Gitterparameter	5
$A_\mathrm{r}(\mathrm{Si}) = \sum_i x(^i\mathrm{Si})\,A_\mathrm{r}(^i\mathrm{Si})$	5
Punktdefekte	5
Oberflächenschichten	10
Volumen der Kugel	10
Gesamtunsicherheit	17

Tab. 1: Voraussichtliche Unsicherheiten für die Darstellung des Kilogramm mit der XRCD-Methode.

Eine ausführlichere Beschreibung der XRCD-Experimente wird im nächsten Heft (Mol und Avogadro-Konstante) zu finden sein.

4. ANDERE METHODEN

Bislang wurden die beiden Ansätze XRCD und Kibble-Waage als Methoden zur Realisierung des „Planck-Kilogramms“ mit höchster Genauigkeit identifiziert. Die Definition der Einheit Kilogramm durch die Festlegung des Zahlenwertes der Planck-Konstanten erlaubt jedoch prinzipiell auch andere Realisierungen. Diese werden gerade bei kleineren Massewerten interessant, da hier die relativen Messunsicherheiten aus der konventionellen Massemetrologie um einige Größenordnungen höher sind als bei 1 kg, wie in Abb. 4 gezeigt. Die Messeinrichtungen existieren sogar schon weitgehend aus dem Bereich der Messung kleiner Kräfte. In Abb. 8 ist als Beispiel die Spannungswaage des NIST skizziert [10]. Ähnlich wie in der EMK-Wägezelle wird die Testmasse auf eine Parallellenkerführung gelegt. Die Gewichtskraft wird auf der Seite der einleitenden Kraft jedoch durch eine elektrostatische Kraft kompensiert, realisiert durch einen Kondensator. Die an dem Kondensator angelegte Spannung wird über ein Spannungsnormal rückgeführt. Die zur Kompensation der Gewichtskraft notwendige elektrostatische Kraft kann beschrieben werden durch [10]

$$F_\mathrm{e} = \frac{{}^{\mathrm{d}C}\!/_{\mathrm{d}z} \cdot (V + V_\mathrm{s})^2}{2}. \quad (14)$$

C beschreibt die Kapazität des Kondensators und dessen Gradient $\mathrm{d}C/\mathrm{d}z$ wird über eine statische Messung an verschiedenen Höhenpositionen z gemessen, wobei die Kapazität über eine Kapazitätsmessbrücke ermittelt wird. V ist die am Kondensator anliegende Spannung und V_s ist eine parasitäre Spannung, welche durch die Oberflächeneigenschaften selbst erzeugt wird. Das

Messsystem ist ausgelegt, um im Kräftebereich von 10 pN bis 0,3 mN zu arbeiten [10]. Für Gewichte der Massen 1 mg und 10 mg konnte gezeigt werden, dass mit dieser Methode eine vergleichbare und teilweise sogar verminderte Messunsicherheit erzielt werden kann, verglichen mit der konventionellen Methode, d. h. durch Aufbau einer Masseskale über mehrere Dekaden [11]. Obwohl das Prinzip sehr ähnlich dem der Kibble-Waagen ist, zählt ein solches Messsystem nicht zu den Kibble-Waagen, da hier kein Bl über eine Faraday-Induktion bestimmt wird. Waagen, welche auf der elektrostatischen Kraftkompensation basieren, sind jedoch nur für Anwendungen im Milligramm-Bereich umsetzbar, da die erzeugbare elektrostatische Kraft nur begrenzt groß werden kann. Das Anheben eines Kilogramms wäre zum Beispiel aus dimensions- und messtechnischen Gründen nicht umsetzbar.

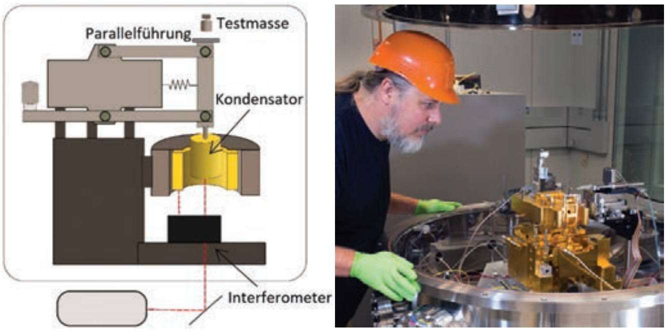

Abb. 8: Linkes Bild: Prinzipskizze der NIST-Spannungswaage. Die Rückstellkraft wird durch eine elektrostatische Kraft erzeugt, durch den Kondensator. Die Positionsmessung erfolgt durch ein Laserinterferometer.
Rechtes Bild: Der Wissenschaftler Gordon Shaw mit seiner NIST-Spannungswaage. (Quelle: NIST)

Der Vorteil durch die Neudefinition des Kilogrammes ist gerade bei den Milligramm-Waagen naheliegend. Messungen können effizienter durchgeführt werden, da der Vergleich mit Referenzgewichten entfällt. Ferner kann das Messsystem für diesen nur kleinen Messbereich optimiert werden. Die Kalibrierunsicherheit über die elektrischen Größen ist wesentlich kleiner als die Messunsicherheiten der Referenzgewichte.

Für die Kraftmessung hat die Neudefinition einen weiteren Vorteil. Da nun nicht mehr mit einer Gewichtskraft als Referenz umgegangen werden muss, ist die Kenntnis der lokalen Fallbeschleunigung nicht mehr nötig, wenn die Kraft – welche Ursache auch immer ihr zugrunde liegen mag – direkt durch Vergleich mit einer elektromagnetischen Kraftmessung rückgeführt wird.

Die Definition der Planck-Konstante hat weitere Konsequenzen für die Metrologie. So kann zum Beispiel auf eine übliche Massewaage ein Spiegel aufgebracht werden. Richtet man einen Laserstrahl auf den Spiegel, so findet ein Impulsübertrag $p = h/\lambda$ (h: Planck-Konstante, λ: Lichtwellenlänge) von den Photonen auf den Spiegel statt. Ein kontinuierlicher Impulsübertrag erzeugt eine Kraft, die mit der Waage gemessen werden kann. Die vom Laser erzeugte Kraft ist hierbei

$$F = \frac{2P}{c}, \tag{15}$$

wobei P die Leistung des Lasers angibt und c die Lichtgeschwindigkeit bedeutet. Somit kann die Laserleistung auf die Kraftmessung rückgeführt werden [10].

Werden kleine Teilchen, wie Atome oder Moleküle, mit einem Laser bestrahlt, so kann die Compton-Streuung direkt zur Bestimmung der Teilchenmasse herangezogen werden, denn die Frequenzverschiebung

$$\Delta\nu = \frac{m \cdot c^2}{h} \tag{16}$$

durch die Compton-Streuung ist zur Teilchenmasse m proportional. In Gleichung (16) ist c wieder die Lichtgeschwindigkeit und h ist die Planck-Konstante. Die Neudefinition bietet somit viele neue Möglichkeiten für die Masse- und Kraftmetrologie.

5. ZUSAMMENFASSUNG

Seit 1889 definiert ein Zylinder aus Platin-Iridium weltweit die Einheit der Masse, das Kilogramm. Im November 2018 wurde entschieden, dass die Einheit Kilogramm zukünftig über die Planck-Konstante definiert ist. Weltweit haben Forscher über Jahrzehnte Methoden untersucht, mit denen die Planck-Konstante möglichst genau bestimmt werden sollte. Schließlich haben die Ergebnisse zweier dieser Methoden – das Watt-Waagen-Experiment und das XRCD-Experiment – die finalen Zahlenwerte für die Festlegung der Planck-Konstante geliefert. Durch eine nahezu unmittelbare Kalibrierung der in den Experimenten verwendeten Massestücke mit dem Urkilogramm ist gewährleistet, dass es keinen „Sprung" bei der Realisierung des Kilogramms gibt. Die Zahlenwerte bleiben gleich, lediglich die Unsicherheiten der Massewerte ändern sich ein wenig.

Mit der Neudefinition auf der Basis der Planck-Konstante verliert das Kilogramm allerdings auch seine herausgehobene Position. Von nun an können alle Werte der Masseeinheit theoretisch genauso gut unmittelbar dargestellt werden. In der Praxis ist das allerdings noch nicht so. Die etablierten Massestücke werden auch in Zukunft eine wichtige, weil praktische Rolle bei der Weitergabe der Masseeinheit spielen. Auch die Systeme, die Massewerte unmittelbar über die Planck-Konstante realisieren, wie Kibble-Waagen oder Silicium-Kugeln, müssen verglichen und überwacht werden. Nichts ist dafür besser geeignet als hochstabile Massestücke. Allerdings zeigen sich bereits jetzt Anwendungen der neuen Definition im Bereich sehr kleiner Massen und Kräfte ohne ihren Einsatz. Es ist davon auszugehen, dass Messeinrichtungen, die auf weiterentwickelten und spezialisierten Wägeeinrichtungen beruhen, wie z. B. elektrostatische Waagen, eine wichtige Alternative zu Massestücken werden. Diese und andere Wägeeinrichtungen auf der Grundlage elektrischer Messgrößen, die auf Basis der neuen Kilogrammdefinition eine unmittelbare Bestimmung (Messung) von Massewerten erlauben, werden nicht nur an der Spitze der Massemetrologie eingesetzt werden, sondern aufgrund der möglichen Umsetzung von Messbereichen sicherlich auch im Labor- und Industriebereich.

Die Masse extrem genau charakterisierter isotopenangereicherter Silicium-Kugeln wird aus Materialparametern berechnet. Die Kugeln können verwendet werden wie hochgenaue Massenormale. Genau wie Massenormale müssen auch die Kugeln regelmäßig überprüft werden, nur dass nicht die Masse der Kugel überprüft wird, sondern ihre Materialparameter. Solange sie richtig behandelt werden, sind Silicium-Kugeln sehr stabil.

Beide bisher bekannten Wege zur Realisierung des „neuen" Kilogramms, die Charakterisierung einer Messeinrichtung unter Verwendung von Quantennormalen und die Charakterisierung von Maßverkörperungen wie einer Siliciumkugel, haben Vor- und Nachteile. Die Anwender können je nach Aufgabe die passende Variante wählen. Und geht eine Apparatur oder eine Siliciumkugel kaputt, bricht nicht die „Massewelt" zusammen, sondern es kann mit der „Bauanleitung" der neuen Definition eine neue Realisierung der Einheit geschaffen werden.

Übrigens, das Urkilogramm wiegt immer noch exakt ein Kilogramm, nur ist ihm jetzt eine Messunsicherheit beigemessen.

LITERATUR

[1] R. D. Deslattes, A. Henins, H. A. Bowman, R. M. Schoonover, C. L. Carroll, I. L. Barnes, L. A. Machlan, L. J. Moore und W. R. Shields, „Determination of the Avogadro constant," *Physical Review Letters,* Bd. **33**, p. 463, 1974.

[2] D. Haddad, F. Seifert, L. S. Chao, A. Possolo, D. B. Newell, J. R. Pratt, C. J. Williams und S. Schlamminger, „Measurement of the Planck constant at the National Institute of Standards and Technology from 2015 to 2017," *Metrologia,* Bd. **54**, p. 633, 2017.

[3] B. M. Wood, C. A. Sanchez, R. G. Green und J. O. Liard, „A summary of the Planck constant determinations using the NRC Kibble balance," *Metrologia,* Bd. **54**, p. 399, 2017.

[4] D. Haddad, F. Seifert, L. S. Chao, S. Li, D. B. Newell, J. R. Pratt, C. Williams und S. Schlamminger, „Bridging classical and quantum mechanics," *Metrologia,* Bd. **53**, p. A83, 2016.

[5] I. A. Robinson und S. Schlamminger, „The watt or Kibble balance: a technique for implementing the new SI definition of the unit of mass," *Metrologia,* Bd. **53**, p. A46, 2016.

[6] C. Rothleitner, J. Schleichert, N. Rogge, L. Günther, S. Vasilyan, F. Hilbrunner, D. Knopf, T. Fröhlich und F. Härtig, „The Planck-Balance—using a fixed value of the Planck constant to calibrate E1/E2-weights," *Measurement Science and Technology,* Bd. **29**, p. 074003, 2018.

[7] K. Fujii, H. Bettin, P. Becker, E. Massa, O. Rienitz, A. Pramann, A. Nicolaus, N. Kuramoto, I. Busch und M. Borys, „Realization of the kilogram by the XRCD method," *Metrologia,* Bd. **53**, p. A19, 2016.

[8] O. Rienitz, A. Pramann und D. Schiel, „Novel concept for the mass spectrometric determination of absolute isotopic abundances with improved measurement uncertainty: Part 1 – theoretical derivation and feasibility study," *International Journal of Mass Spectrometry,* Bd. **289**, pp. 47-53, 2010.

[9] N. V. Abrosimov, D. G. Aref'ev, P. Becker, H. Bettin, A. D. Bulanov, M. F. Churbanov, S. V. Filimonov, V. A. Gavva, O. N. Godisov, A. V. Gusev, T. V. Kotereva, D. Nietzold, M. Peters, A. M. Potapov, H.-J. Pohl, A. Pramann, H. Riemann, P.-T. Scheel, R. Stosch, S. Wundrack und S. Zakel, „A new generation of 99.999% enriched ^{28}Si single crystals for the determination of Avogadro's constant," *Metrologia,* Bd. **54**, p. 599, 2017.

[10] G. A. Shaw, „Current state of the art in small mass and force metrology within the International System of Units," *Measurement Science and Technology,* Bd. **29**, p. 072001, 2018.

[11] G. A. Shaw, J. Stirling, J. A. Kramar, A. Moses, P. Abbott, R. Steiner, A. Koffman, J. R. Pratt und Z. J. Kubarych, „Milligram mass metrology using an electrostatic force balance," *Metrologia,* Bd. **53**, p. A86, 2016.